Сопряженные уравнения и теория возмущений для линейных функционалов

Лектор: д.ф.-м.н., профессор Темирбеков Н.М.

Пусть рассматривается задача вида

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx}=f(x), x \in (0,1), \varphi(0)=\varphi(1)=0, \quad (5.1)$$

где решение φ принадлежит множеству $D(A)$ введенному в лекции 2. а $f(x)$ - пространству $H=L_2(0,1)$. Оператор $A=-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}$ действует в H и определен на функциях из $D(A)$. Задачу (5.1) будем называть невозмущенной.

Функционал

$J_p[\varphi] = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx$, (5.2)

где $p(x)$ — заданная функция из H.

значение функционала (5.2)

$J_p[\varphi] = \int_0^1 f(x)\varphi^*(x)dx$, (5.3)

Где $\varphi^*(x)$ - решение следующей сопряженной задачи:

$-\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi^*}{dx} = p(x), x \in (0,1),\ \varphi^*(0) = \varphi^*(1) = 0,$
(5.4)

Возмущенная задача вида

$$-\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi'}{dx}+\delta g(x)\varphi'(x)=f'(x),$$

$x\in(0,1)$, $\varphi'(0)=\varphi'(1)=0$, (5.5)

Где $f'(x)=f(x)+\delta f$; $\delta g(x), \delta f(x)$ – некоторые заданные возмущения функции.

решение φ'

$\varphi'(x)=\varphi(x)+\delta\varphi$, (5.6)

Где $\varphi(x)$ –решение невозмущенной задачи (5.1), $\delta\varphi=\varphi'-\varphi$. При этом изменится и значение функционала, и мы будем иметь

$J_p'=J_p+\delta J_p$, (5.7)

Где

$\delta J_p=\int_0^1 p(x)\delta\varphi(x)dx.$

$$\int_0^1 \left(-\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\varphi^* + \frac{d\varphi'}{dx}\varphi^* + \delta g(x)\varphi'\varphi^*\right)dx + \int_0^1 \left(\frac{d^2\varphi^*}{dx^2}\varphi' +\right.$$

Если δg=0, то формула (5.13) переходит в формулу (3.20), полученную в лекции 3.

$\varphi'(x) \approx \varphi(x)$.

$$\delta J_p \approx \int_0^1 \varphi^*(x)\big(\delta f(x) - \delta g(x)\varphi(x)\big)dx. \quad (5.14)$$

Приведем численный пример. Пусть в рассмотренной задаче $f(x) = sin\pi x, \delta f(x) \equiv 0$,

$$p(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[\frac{0,1}{2}\right), \\ 2(1-x), x \in \left[\frac{1}{2,1}\right]. \end{cases}$$

В качестве $\delta g(x)$ рассмотрим постоянную $\delta g(x) \equiv \varepsilon$. Будем менять ε следующим образом:

$\varepsilon = 1, \varepsilon = 0{,}1, \varepsilon = 0{,}01$.

Для каждого из этих случаев численно (методом конечных разностей на равномерной сетке с шагом $h = 0{,}01$) были решены задачи (5.1), (5.4) или (5.5). Графики функций $\varphi(x), \varphi^*(x)$ или $\varphi'(x)$ при $\varepsilon = 1$ приведены на рисунке 6. Было проведено сравнение значений функционала J_p' при различных ε. Для этой цели использовались эквивалентные формулы для возмущенной задачи:

$$J_p^{(1)} = \int_0^1 p(x)\varphi'(x)dx \equiv J_p',$$

$$J_p^{(2)} = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx - \int_0^1 \varphi^*(x)\delta g(x)\varphi'(x)dx.$$

(смотреть формулу (5.13)).

Если в $J_p^{(2)}$ приближенно заменить φ' на φ , то с учетом малых возмущений получим

$$J_p^{(3)} = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx - \int_0^1 \varphi^*(x)\delta g(x)\varphi(x)dx.$$

(смотреть формулу (5.14)).

Значение $J_p^{(i)}(i = 1,2,3)$ для различных ε приведены в таблице 3.

Таблицы 3.

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0{,}1$	$\varepsilon = 0{,}01$	$\varepsilon = 0$
$J_p^{(1)}$	0,0550755	0,0597395	0,0602504	0,0603166
$J_p^{(2)}$	0,0551037	0,0597829	0,0602948	0,0603166
$J_p^{(3)}$	0,0546047	0,0597775	0,0602947	0,0603166

- Пусть рассматривается основная задача в виде (4.1):
- $A\varphi(x) = f(x)$. (5.15)

$A' = A + \delta A$,

$\varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x), J_p' = J_p + \delta J_p$.

$A'\varphi' = f'$, (5.16)

- Где
- $f' = f + \delta f$.

$A^*\varphi^* = p$, (5.17)

Где A^* - сопряженный оператор, определяемый тождеством Лагранжа (4.5).

Умножим скалярно уравнение (5.16) на φ^*, а уравнение (5.17) на φ' и результаты вычтем один из другого. Получим

$$(A'\varphi', \varphi^*) = (\varphi', A^*\varphi^*) = (f', \varphi^*) - (p, \varphi'). \quad (5.18)$$

Предположим, что $D(A) = D(A^*)$ и $\varphi, \varphi' \in D(A^*), \varphi^* \in D(A^*)$. Левую часть соотношения (5.18), имея в виду, что $A' = A + \delta A$, преобразуем к виду

$$(A\varphi', \varphi^*) - (\varphi', A^*\varphi^*) + (\delta A\varphi', \varphi^*) = (\delta A\varphi', \varphi^*). \quad (5.19)$$

Здесь мы воспользовались тождеством Лагранжа

$$(A\varphi', \varphi^*) - (\varphi', A^*\varphi^*) = 0.$$

Правую часть соотношения (5.18) приведем к виду

$$(f, \varphi^*) - (p, \varphi) + (\delta f, \varphi^*) - (p, \delta\varphi) = (\delta f, \varphi^*) - \delta J_p. \quad (5.20)$$

При упрощении левой части (5.20) было использовано равенство (4.8), т.е.
$(f, \varphi^*) - (p, \varphi) = 0$.

Принимая во внимание соотношения (5.19) и (5.20), выражение (5.18) записывается в виде

$$(\delta A\varphi', \varphi^*) = (\delta f, \varphi^*) - \delta J_p. \quad (5.21)$$

Отсюда приходим к формуле теории возмущений

$$\delta J_p = (\delta f - \delta A\varphi', \varphi^*). \quad (5.22)$$

Если возмущения считать малыми, то, положив приближенно $\varphi' = \varphi$, приходим к формуле теории малых возмущений

$$\delta J_p = (\delta f - \delta A\varphi, \varphi^*). \quad (5.23)$$

$$A^h v^h = f^h \quad (5.24)$$

$$J_p^h = (p^h, v^h). \quad (5.25)$$

$$(A^h)^* \omega^h = p^h. \quad (5.26)$$

$$(A^h v^h, \omega^h) = \left(\left(A^h\right)^* \omega^h, v^h\right).$$

$$J_f^h = \left(f^h, \omega^h\right) \quad (5.27)$$

$$J_p^h = J_f^h. \quad (5.28)$$

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.